1007. 束ノ中心

前田　文友（廣島文理大）

私ハ前著 *Relative Dimensionality in Operator Rings*（廣島文理大紀要第11巻(1941), 1—6頁）ニ於テ，Hilbert空間ニ於ケル operator ring ニ含マレタアラユル projection ノ作ル束ニ於ケル，J. v. Neumann ノ可約ナル連続幾何學（一般ニハ complemented modular lattice）ノ場合ト同ジク，次ノ四ツノ命題ガ equivalent デアルコトヲ證明シタ．今 a ヲ束 L ノ要素トスル．

(α)　a ハ L ノ中心ニ屬スル．

(β)　a ハ neutral element デアル．

(γ)　a ハ complement a' ヲ有シ，$(a, a')D$ デアル．

(δ)　a ハ unique complement a' ヲ有スル。

コヽデ，L ノ中心トハ Birkhoff, Lattice theory P.23 ニ定義シテアルガ如ク，L ヲ $S\,T$ ノ如キ束ノ積トシテアラハストキ $[1, 0]$ トシテアラハサレル L ノ要素ノ全体デアル．コレハ L ガ一般ノ束ノ場合ノ中心ノ定義デアルガ，特ニ L ガ modular デアル場合ニハ J.v. Neumann ノ連続幾何學ノ講義 I. 39 頁ノ如ク，L ヲ $L(0, a)$ ト $L(0, b)$ トノ直和（$L = L(0, a) \oplus L(0, b)$）デアラハシ得ルガ如キ要素 a ノ全体トナル．

次ニ a ガ L ノ neutral element デアルトハ，a ト L ノ任意ノ二要素 x y トガ L ノ distributive sublattice

ヲ生成スル，即チaト任意ノx, yトハアラユル形ノ配分ノ式ヲ満足スルコトデアル。

コレハ Birkhoff, Neutral Elements in General Lattices, Bull. A. M. S. 46 (1940), 702 ニアル定義デアル．連続幾何学ノ講義40頁ノ$(a)D$ニ相當スル。

$(a, b)D$トハ，Lノ任意ノ要素xニ對シテ$x \wedge (a \vee b) = (x \wedge a) \vee (x \wedge b)$が成立スルコトデアル。$L$が modular デアル場合ハ連續幾何學講義 I, 38頁 Theorem 5.1 カラ，上ノ式ニ於テa, bノ位置ハドコデモヨイノデアルが，一般ノ lattice ノ場合ハa, bハ上ノ如キ位置ニアルモノトスル。

(α) —— (δ) ノ四命題が equivalent デアルコトハ連續幾何学ノ場合ハ講義40頁 Theorem 5.2, Theorem 5.3 ノ如ク modularity ヲ用ヒテ証明シテ居ル．Operator ring ノ場合ハ必ズシモ modular トハ云ヘナイカラ，operator ト云フ具体的ノ性質ヲ用ヒテ居ル．コゝデハ、コノ両者ヲ包含スルが如キ一般ノ束ノ場合ノ定理ヲ求メル。

ソレニハ Wilcox, Modularity in the theory of Lattices, Annals of Math. 40 (1939), 494 ニ導入サレタ次ノ概念ヲ用ヒル．如何ナル$c \leqq a$ニ対シテモ$(b \vee c) \wedge a = (b \wedge a) \vee c$が成立スルトキ$(b, a)M$トカク。$a \wedge b = 0$ニシテ$(b, a)M$, $(a, b)M$が同時ニ成立スルトキハ$(a, b)\perp_s$トカク。（コレハ affine geometry ニ於テハaトbトが交ラズ　シカモ平行デナイコトヲ意味シ

テ居ル)

補助定理1　次ノ二ツノ命題ハ equivalent デアル。

(1°)　$(a, b)\perp_s$

(2°)　$a\wedge b=0$ ニシテ, $x\leqq a$, $y\leqq b$ ナル任意ノx, y ニ対シテ

$$a\wedge(x\vee y)=x,\quad b\wedge(x\vee y)=y \tag{1}$$

(証)　(1°) ⟶ (2°)　$x\leqq a$, $(b, a)M$ デアルカラ

$$x\leqq a\wedge(x\vee y)\leqq a\wedge(x\vee b)=x$$

故ニ　$a\wedge(x\vee y)=x$　　同様ニ $b\wedge(x\vee y)=y$ デアル。

(2°) ⟶ (1°)　(1) ノ第一式ニ於テ $y=b$ トオケバ $a\wedge(x\vee b)=x$　即チ $(b, a)M$

同様ニ $(a, b)M$

定理1　束Lガ0及ビ1ヲ有スルトキ, 次ノ三ツノ命題ハ equivalent デアル。

(α)　a ハ L ノ中心ニ属スル。

(β)　a ハ neutral ニシテ complement a' ヲ有スル。

(γ)　a ハ complement a' ヲ有シ, $(a, a')D$, $(a, a')\perp_s$ デアル。[1]

(証)　(i)　(α) ⟶ (β)　$L=S\,T$ トアラハストキハ,

---

(1)　(α) ト (β) トガ equivalent デアルコトハ, 上記 Birkhoff ノ論文 105 頁 Theorem 6 ニ証明シテアル。

$a=[1,0]$ デアルカラ a ハ complement $a'=[0,1]$ ヲ有スル。 $[1,0]$ ガ ST ノ neutral element ナルコトハ, $1,0$ ガ夫々 S,T ノ neutral element デアルコトカラ容易ニ驗證シ得ル。

例ヘバ $[1,0]\wedge([x,y]\vee[u,w])=[1,0]\wedge[x\vee u,\ y\vee w]$

$$=[1\wedge(x\vee u),\ 0\wedge(y\vee w)]$$

$$=[(1\wedge x)\vee(1\wedge u),\ (0\wedge y)\vee(0\wedge w)]$$

$$=[1\wedge x,\ 0\wedge y]\vee[1\wedge u,\ 0\wedge w]$$

$$=([1,0]\wedge[x,y])\vee([1,0]\wedge[u,w]).$$

(ii) $(\beta)\to(\gamma)$ a ハ neutral デアルカラ, $(a,a')D$, $(a,a')M$, $(a',a)M$ ガ成立スル。

(iii) $(\gamma)\to(\delta)$ $S=(s;\ s\leqq a)$, $T=(t;\ t\leqq a')$ トオキ, $L=ST$ ナルコトヲ証明スル。

任意ノ $x\in L$ ニ對シテ $x\to[x\wedge a,\ x\wedge a']$ ナル對應ヲ考ヘレバ, $[x\wedge a,\ x\wedge a']\in ST$ デアル. 逆ニ $[s,t]$ ヲ ST ノ任意ノ要素トスル.

$x=s\vee t$ トオクトキハ, 補助定理ノカラ $x\wedge a=(s\vee t)\wedge a=s$. 同樣ニ $x\wedge a'=t$. 即チ x ハ $[s,t]$ ノ原像デアル.
而シテ $[x\wedge a,\ x\wedge a']=[y\wedge a,\ y\wedge a']$ ナルトキハ $x\wedge a=y\wedge a$, $x\wedge a'=y\wedge a'$, $(a,a')D$ ナレバ

$$x=x\wedge(a\vee a')=(x\wedge a)\vee(x\wedge a')$$

$$=(y\wedge a)\vee(y\wedge a')=y\wedge(a\vee a')=y$$

故ニ $x\to[x\wedge a,\ x\wedge a']$ ニヨリテ L ト ST トハ一對一ノ對應ヲナス。コノ對應ハ明ラカニ order ヲ変ヘナイ。故ニ

L ト ST トハ isomorph デアル. シカシテ $a \longrightarrow [1, 0]$ デアルカラ, a ハ L ノ center ニ屬スル。

次ニ L ニ relatively complemented ナル條件ヲ與ヘル. 即チ $a \leqq x \leqq b$ ナルトキハ, $x \vee y = b$, $x \wedge y = a$ ヲ滿足スル. x ノ relative complement y ガ存在スルト假定スル.

補助定理 2. L ヲ relatively complemented lattice トスル. $a \wedge x = 0$ ナルトキハ, $x \leqq a'$ ナルガ如キ a ノ complement a' ガ存在スル。[1]

(証) $(a \vee x) \vee y = 1, \quad (a \vee x) \wedge y = x$ (1)

ヲ滿足スル y ヲトル. (1) ノ第二式カラ $y \geqq x$ デアル. 故ニ (1) ノ第一式ハ $a \vee y = 1$ トナル. 又 (1) ノ第二式ヨリ

$a \wedge y = a \wedge (a \vee x) \wedge y = a \wedge x = 0$. 故ニ y ガ求ムル a' デアル。

<u>定理 2</u>. L ヲ 1, 0 ヲ有スル relatively complemented lattice トスレバ, 次ノ四ツノ命題ハ equivalent デアル。

(a) a ハ L ノ中心ニ屬スル.

---

(1) コノ dual モ成立スル. a' ガ relative complement ノ場合ニモ拡張出來ル. V. Neumann 連続幾何學ノ講義 I, 7 頁ニ於テハ, L ガ complemented modular lattice ノ場合ヲ証明シテ居ル. シカシ上ノ如ク modular デナクトモ成立スル。

(β) a ハ neutral element デアル。

(γ) a ノ complement a' ニ對シ, $(a, a')D$, $(a, a')\perp_s$ ガ成立スル。

(δ) a ハ unique complement a' ヲ有シ $(a, a')\perp_s$ デアル。

(證) complement ノ存在ハ假定シテ居ルカラ，定理ノカラ (α), (β), (γ) ハ equivalent デアル。

(α) $\longrightarrow$ (δ) ヲ證明シヨウ。

$$[1, 0] \vee [x, y] = [1, 1], \quad [1, 0] \wedge [x, y] = [0, 0]$$

ガ成立スルノハ $x = 0$, $y = 1$ ノトキ及ビソノトキニ限ル．故ニ $a = [1, 0]$ ハ unique complement $a' = [0, 1]$ ヲ有スル． $(a, a')\perp_s$ ハ (γ) カラ出ル。

次ニ (δ) $\longrightarrow$ (α) ヲ證明シヨウ．任意ノ $x \in L$ ヲトリ，$u = a \wedge x$ トオク． $u \vee v = x$, $u \wedge v = 0$ ナル v ヲトル．シカルトキハ $a \wedge v = a \wedge v \wedge x = u \wedge v = 0$.
a ハ unique complement a' ヲ有スルカラ補助定理2カラ $v \leqq a'$ デアル。

$u \leqq a$, $v \leqq a'$ ニシテ $(a, a')\perp_s$ デアルカラ，補助定理ノカラ $a' \wedge x = a' \wedge (u \vee v) = v$

故ニ $x \wedge (a \vee a') = x = u \vee v = (x \wedge a) \vee (x \wedge a')$

即チ $(a, a')D$ デアル． (證明終)

定理2ガ，始メニ述ベタ complemented modular lattice ノ場合ト operator ring ノ場合ノ両者ヲ包含スル所ノ求ムル定理デアル．コノコトハ complemented modular lattice ノ場合ハ明ラカデアル。ナントナレバコノトキハ relatively complemented デアリ，modularity カラ $(a, a')\perp_s$ ハ常ニ成立スルカラ，(γ) (δ) ニ於テ $(a, a')\perp_s$ ハ不要デアル。

次ニ operator ring ノ場合ヲ考ヘル．$\mathbf{M}$ ヲ Hilbert 空間ニ於テ 1 ヲ含ム operator ring トシ，$\mathbf{M}$ ニ属スル projection ノ全体ヲ $\mathbf{E}$ ニテアラハス．$E, F \in \mathbf{E}$ ナルトキ，$E \leqq F$ ヲ $EF = FE = E$ ニヨッテ定義スルトキ $\mathbf{E}$ ハ束ヲナシテ居ル．$EF = 0$ 或ハ $FE = 0$ ノトキハ $E \vee F = E + F$ デアリ，$EF = FE$ ノトキハ $E \wedge F = EF$ デアル。

先ヅ $\mathbf{E}$ ガ relatively complemented ナルコトヲ示ス．$G \leqq E \leqq F$，E, F, G ハ互ニ可換デアルカラ $E_1 = (F - E) \vee G = (F - E) + G$ トオケバ，E ト E_1 トモ可換デアル。故ニ

$$E \vee E_1 = E \vee (F - E) \vee G = E \vee (F - E) = F,$$

$$E \wedge E_1 = EE_1 = E\{(F - E) + G\} = EG = G$$

故ニ E_1 ガ E ノ relative complement デアル。

従ッテ定理 2 ガ適用出来ル．コノトキニ (γ) ニ於テ $(E, E')\perp_s$ ハ不要デアルコトヲ示サウ．$(E, E')\,D$ デアルカラ

$$1 - E = (1 - E) \wedge (E \vee E') = \{(1 - E) \wedge E\} \vee \{(1 - E) \wedge E'\}$$
$$= (1 - E) \wedge E'$$

即チ $1 - E \leqq E'$　従ッテ $(1 - E)E' = E'(1 - E) = 1 - E$.

即チ $EE' = E'E$　　故ニ $EE' = E \wedge E' = 0$
従ッテ $E' = 1 - E$ デアル。今 $H \leqq E$ トスルトキハ，E, H, E' ハ互ニ可換デアリ $HE' = 0$ デアルカラ

$$E \wedge (H \vee E') = E(H + E') = EH = H.$$

故ニ $(E', E)M$. 同様ニ $(E', E)M$. 故ニ $(E, E')\perp_\delta$ デアル。

又 (δ) ニ於テモ $(E, E')\perp_\delta$ ハ不要デアル。ソレハ E ハ unique complement E' ヲ有スルノデアルカラ $E' = 1 - E$ デアルベキデアル。故ニ上述ノ如ク $(E, E')\perp_\delta$ デアル。

カクノ如クシテ定理2カラ operator ring ノ場合ノ定理ガ出テ来ル。

以上デ我々ノ目的ハ達セラレタノデアルガ、定理2ニ関聯シテ次ノコトガ云ヘル。束ノ中心ハ Boole 代数ヲ作ルカラ[1] 定理2カラ直ニ次ノ定理ガ成立スル。

<u>定理3</u>　$0, 1$ ヲ有スル relatively complemented lattice L ガ Boole 代数デアルタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ，L ノ任意ノ要素 a ハ唯一ツノ complement a' ヲ有シ，$(a, a')\perp_\delta$ ガ成立スルコトデアル。

コノ定理ハ complement ノ單一性カラ Boole 代数ガ云ヘル一ツノ場合ヲ示シテ居ル。Birkhoff ノ本 94 頁ニ complement ノ單一性ノミカラ Boole 代数ガ云ヘルカドウカハ未解決ノ問題デアルトナシ，次ノ三ツノ場

(1) Birkhoff ノ論文，705 頁 Theorem 5.

合ニハソレガ云ヘルコトヲ述ベテ居ル。

(1°) L ガ modular ナルトキ,

(2°) $a \rightarrow a'$ ガ dual automorphism ナルトキ,

(3°) L ガ complete atomic lattice ナルトキ.

定理 3 ハ (1°) ノ場合ヲ更ニ一般化シタモノデアル。

尚定理 3 ニ於テ, complement ノ単一性ヲ除ケバ, 次ノ定理ガ成立スル.

<u>定理 4.</u> 0, 1 ヲ有スル relatively complemented lattice L ガ modular デアルタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ, 任意ノ要素 a トソノ complement a' トノ間ニ $(a, a')\perp_p$ ガ成立スルコトデアル。

(証) 必要ナルコトハ明ラカデアル。充分ナルコトヲ証明スルタメニ, $c \leqq a$ ナルトキ $(b \vee c) \wedge a = (b \wedge a) \vee c$ ガ成立スルコトヲ証明シヨウ。 $(a \wedge b) \vee x = b$, $(a \wedge b) \wedge x = 0$ ナル x ヲトレバ, $x \leqq b$ デアルカラ $a \wedge x = 0$. 故ニ補助定理 2 ヨリ $x \leqq a'$ ナル a ノ complement a' ガ存在スル。 $(a \wedge b) \vee c \leqq a$ ニシテ $(a, a')\perp_p$ デアルカラ補助定理 1 カラ $(b \vee c) \wedge a = [(a \wedge b) \vee x \vee c] \wedge a = (a \wedge b) \vee c$ デアル。

(終)